

Статистическая ПН.2: строгий двухточечный аудит

С3.8Т · редакция 1.0 · условная математическая форма

Курпишев Иван Борисович

6 сентября 2026 года · Калининград

1 Предмет аудита и заключение

Аудируется кандидат PN2-SD-C3.8N-v0.1 из проекта «ЛОГИКА КУРПИШЕВА 2». Исходный пакет уже определяет риски как максимум по двум ветвям от **математического ожидания метрической ошибки** и предлагает доказательство через общую субмеру распределений. Настоящий текст разворачивает этот довод, фиксирует его предпосылки, проверяет точность констант и отделяет верные выводы от недопустимых усилений.

Заключение: кандидатная оценка корректна при предпосылках A1–A6 ниже. Для каждого общего, не зависящего от истинной ветви решающего правила с конечными рисками

$$\mathcal{R}_R \mathcal{R}_D \geq \frac{\|K\| \Delta_D}{4} (1 - \tau)^2, \quad \tau = \text{TV}(P_L, P_R). \quad (\text{T2})$$

Константа и зависимость от полного вариационного расстояния не могут быть улучшены универсально. Оценка не утверждает положительной нижней границы для произведения ошибок в каждом опыте, для его математического ожидания, для произведения рисков одной общей худшей ветви или для произведения стандартных отклонений.

Статус результата: **математический аудит пройден при явно заданных предпосылках**. Включение в канон не выполнено: предлагается отдельное условное статистическое приложение. Канонический С3.8N и исходные научные файлы сохранены. Независимое рецензирование и физическая проверка не проведены. truth_layer_promotion=0, EXT_RUN=NOT_RUN.

2 Обозначения и явные предпосылки

A1. Один фиксированный эксперимент. На одном измеримом пространстве $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ заданы вероятностные меры P_L, P_R . Под $\mathcal{Y}$ понимается весь доступный решающему правилу протокол данных, включая дополнительные признаки и результаты повторных измерений. Управляющий протокол u зафиксирован; при его изменении применяется отдельная оценка с P_L^u, P_R^u .

A2. Две фиксированные цели. Для координаты X заданы точки x_L, x_R в метрическом пространстве $(\mathcal{X}_X, d_X)$; функция потерь $d_X(a, x_b)$ измерима по

действию a . Расстояние $\Delta_X = d_X(x_L, x_R)$ конечно. Ни разделимость данных, ни наличие плотности относительно меры Лебега не предполагаются.

А3. Общее правило. Оценка задаётся одним марковским ядром $Q_X(da | y)$, используемым в обеих ветвях. Детерминированная оценка является частным случаем $Q_X = \delta_{\hat{x}(y)}$. Рандомизация допустима, но её закон условно по данным не зависит от неизвестной ветви. Любая фактически доступная подсказка о ветви должна входить в Y ; она может увеличить различимость.

А4. Метрические ожидаемые потери. Определены конечные неотрицательные риски

$$r_{X,b} = \int_y \int_{x_X} d_X(a, x_b) Q_X(da | y) P_b(dy), \quad \mathcal{R}_X = \max\{r_{X,L}, r_{X,R}\}. \quad (1)$$

Именно эти величины перемножаются в (Т2). Конечность исключает неопределённость вида $0 \cdot \infty$; отдельная одномерная нижняя оценка сохраняет смысл и для бесконечного риска. Свободный отказ с нулевой потерей в обеих ветвях не является метрической потерей между различными целями.

А5. Подстановка координат ПН.2. Для S, D берутся реальные значения s_b, d_b и абсолютная потеря; $\Delta_S = |s_L - s_R|$, $\Delta_D = |d_L - d_R|$. Для R фиксируются точки r_L, r_R в одном нормированном линейном пространстве и равенство $K = r_L - r_R$, так что $\Delta_R = \|K\|$. Эта идентификация должна быть обоснована в конкретной модели: одного обозначения «ассоциатор K » недостаточно.

А6. Совместимость постановки. Обе координаты относятся к одной паре ветвей и одному информационному эксперименту. Отдельные ядра оценивания могут различаться и быть сколь угодно зависимыми через данные; независимость ошибок не требуется. Если оценивающие устройства получают разные наблюдения, безопасная общая постановка использует весь доступный совместный протокол. Для отдельной c -формы дополнительно требуется $\Delta_S \geq c\|K\|$ с $c \geq 0$.

При нулевом расстоянии или $\tau = 1$ соответствующая нижняя граница равна нулю. Положительная граница требует одновременно положительных расстояний и $\tau < 1$.

3 Общая субмера и её масса

Положим $\mu = P_L + P_R$, $p = dP_L/d\mu$, $q = dP_R/d\mu$ и

$$\nu(A) = \int_A \min\{p, q\} d\mu. \quad (2)$$

Тогда $\nu \leq P_L, P_R$. Используется нормировка

$$\tau = \sup_{A \in \mathcal{F}} |P_L(A) - P_R(A)| = \frac{1}{2} \int |p - q| d\mu \in [0, 1]. \quad (3)$$

Действительно, интеграл $p - q$ равен нулю; его положительная и отрицательная части имеют одинаковые интегралы. Множество $\{p \geq q\}$ достигает супремума. Из тождества $2 \min(p, q) = p + q - |p - q|$ следует

$$\nu(\mathcal{Y}) = 1 - \tau. \quad (4)$$

Построение применимо и к дискретным, и к непрерывным, и к смешанным распределениям. Нормированные «плотности общей части» при $\tau = 1$ не нужны: субмера тогда просто нулевая.

4 Теорема T1: риск одной координаты

Теорема T1. При A1–A4 для всякого допустимого решающего правила

$$\mathcal{R}_X \geq \frac{\Delta_X}{2}(1 - \tau). \quad (T1)$$

Доказательство. Обозначим $L_b(y) = \int d_X(a, x_b) Q_X(da \mid y)$. Для каждого действия метрическое неравенство даёт

$$d_X(a, x_L) + d_X(a, x_R) \geq \Delta_X. \quad (5)$$

Интегрирование по **одному и тому же** вероятностному ядру Q_X сохраняет нижнюю границу: $L_L(y) + L_R(y) \geq \Delta_X$. Поэтому, используя неотрицательность потерь, доминирование мер и теорему Тонелли, получаем

$$\begin{aligned} r_{X,L} + r_{X,R} &= \int L_L dP_L + \int L_R dP_R \\ &\geq \int (L_L + L_R) d\nu \\ &\geq \Delta_X \nu(\mathcal{Y}) = \Delta_X(1 - \tau). \end{aligned} \quad (6)$$

Максимум двух чисел не меньше их полусуммы. Это доказывает (T1). Доказательство не использует плотности относительно Лебега, независимость координат или детерминированность оценивания. $\square$

Формула (1) задаёт риск **фиксированного** правила. Если класс допустимых правил $\mathcal{Q}$ непуст, то собственно минимаксный риск

$$\mathcal{R}_X^* = \inf_{Q_X \in \mathcal{Q}} \max_b r_{X,b}(Q_X) \geq \frac{\Delta_X}{2}(1 - \tau) \quad (7)$$

следует взятием инфимума; существование минимизатора не требуется. Равновесная полусумма в доказательстве не означает, что эксперимент предполагает физически заданные равные априорные вероятности ветвей.

5 Теорема T2: статистические формы ПН.2

Применяя T1 к координатам A5, получаем

$$\mathcal{R}_S \geq \frac{\Delta_S}{2}(1 - \tau), \quad \mathcal{R}_D \geq \frac{\Delta_D}{2}(1 - \tau), \quad \mathcal{R}_R \geq \frac{\|K\|}{2}(1 - \tau). \quad (8)$$

Произведение двух конечных неотрицательных величин не меньше произведения их неотрицательных нижних границ. Следовательно,

$$\mathcal{R}_S \mathcal{R}_D \geq \frac{\Delta_S \Delta_D}{4} (1 - \tau)^2, \quad (\text{T2-S})$$

$$\mathcal{R}_R \mathcal{R}_D \geq \frac{\|K\| \Delta_D}{4} (1 - \tau)^2. \quad (\text{T2-R})$$

При дополнительной c -разделимости из A6

$$\mathcal{R}_S \mathcal{R}_D \geq \frac{c \|K\| \Delta_D}{4} (1 - \tau)^2. \quad (\text{T2-c})$$

Максимумы, определяющие разные $\mathcal{R}_X$, **не обязаны достигаться в одной ветви**. Произведение ожиданий не заменяется ожиданием произведения. Для каждого совместного правила T2 верна, поэтому верна и нижняя граница для инфимума произведения по общему непустому классу правил. Для произведения отдельных минимаксных рисков она также следует из (7), хотя отдельные оптимальные правила могут не реализовываться одним физическим прибором.

6 Граничные случаи и точность

При $\tau = 0$ распределения совпадают. T1 даёт $\mathcal{R}_X \geq \Delta_X/2$, а T2 восстанавливает коэффициент $1/4$. Если действия допускают середину отрезка между двумя целями в нормированном пространстве, постоянная оценка в середине имеет обе ошибки $\Delta_X/2$ и достигает равенства. В произвольном метрическом пространстве середины может не существовать; это не нарушает нижнюю оценку. Совпадение коэффициентов не отождествляет все статистические риски с прежними детерминированными величинами e_X .

При $\tau = 1$ меры взаимно сингулярны, и граница равна нулю. Существует измеримое множество A с $P_L(A) = 1$, $P_R(A) = 0$; если обе целевые точки доступны как действия, правило, выбирающее x_L на A и x_R вне A , имеет нулевой риск. Это утверждение о существовании правила, а не о безошибочности всякой оценки.

Если $\Delta_S = 0$, нельзя сохранять положительную c -форму при $c > 0$, $\|K\| > 0$: нарушается сама предпосылка c -разделимости.

7 Дискретные примеры

D1. Симметричный канал стирания. Пусть $Y \in \{L, \perp, R\}$,

$$P_L = (\tau, 1 - \tau, 0), \quad P_R = (0, 1 - \tau, \tau), \quad 0 \leq \tau \leq 1. \quad (9)$$

На метках L, R оценка возвращает соответствующую цель, на $\perp$ — середину. Полное вариационное расстояние равно τ , и каждый из двух рисков равен $\Delta_X(1 - \tau)/2$. Одно совместное правило достигает равенства в T2 для обеих координат. Поэтому коэффициент $1/4$ оптимален **для каждого** значения $\tau < 1$ в классе

рассматриваемых экспериментов. Это не доказывает наличие такого канала в физической реализации ПН.2.

D2. Симметричный двоичный канал. Пусть $P_L(Y = 1) = q$, $P_R(Y = 1) = 1 - q$, $0 \leq q \leq 1/2$. Тогда $\tau = 1 - 2q$. Правило $Y = 0 \mapsto x_L$, $Y = 1 \mapsto x_R$ даёт оба риска $q\Delta_X$ и достигает T1; произведение равно $q^2\Delta_X\Delta_D$.

D3. Неравенство не всегда является тождеством. Для $P_L = (1, 0)$, $P_R = (1/2, 1/2)$, целей 0, 1 и абсолютной потери имеем $\tau = 1/2$, нижнюю границу $1/4$. Можно ограничить действия отрезком $[0, 1]$ проекцией, не увеличивающей потери. Пусть действия на двух исходах равны a, b . Риски равны a и $(1 - a)/2 + (1 - b)/2$; оптимально $b = 1$, $a = 1/3$. Следовательно, минимаксный риск равен $1/3 > 1/4$. Само значение TV не определяет точный минимаксный риск произвольного эксперимента.

8 Непрерывные примеры

C1. Сдвинутые равномерные распределения. Возьмём $P_L = \text{Unif}[0, 1]$, $P_R = \text{Unif}[t, 1 + t]$, $0 \leq t \leq 1$. Перекрытие носителей имеет длину $1 - t$, и $\tau = t$. На $[0, t)$ возвращается x_L , на $[t, 1]$ — середина, на $(1, 1 + t]$ — x_R . Каждая ошибка интегрируется только по общей части и даёт $\Delta_X(1 - t)/2$. Граничные точки не влияют на интеграл. T1 и T2 достигаются точно.

C2. Нормальный канал. Пусть $P_L = N(-a, \sigma^2)$, $P_R = N(a, \sigma^2)$, $a \geq 0$, $\sigma > 0$, а Φ — функция распределения стандартной нормали. Для $a > 0$ сравнение плотностей меняет знак в нуле. Интегрируя их разность на положительной полуоси, находим

$$\tau = 2\Phi(a/\sigma) - 1, \quad 1 - \tau = 2\Phi(-a/\sigma). \quad (10)$$

Правило по знаку Y возвращает соответствующую цель. Каждая вероятность ошибочного выбора равна $\Phi(-a/\sigma)$; каждый риск равен $\Delta_X\Phi(-a/\sigma)$ и совпадает с T1. При $a = 0$ та же формула верна, а полупространство делит одинаковую непрерывную меру пополам.

При n независимых наблюдениях различимость определяется **совместным** законом. Достаточная статистика — среднее, его дисперсия σ^2/n , и

$$\tau_n = 2\Phi(\sqrt{n}a/\sigma) - 1. \quad (11)$$

Поэтому положительную границу для одного наблюдения нельзя автоматически сохранять при накоплении данных. Для произвольной пары независимых одинаково распределённых наблюдений общая часть удовлетворяет

$$1 - \tau_n = \int \min\left\{\prod_i p_i, \prod_i q_i\right\} \geq \int \prod_i \min\{p_i, q_i\} = (1 - \tau)^n. \quad (12)$$

Отсюда следует консервативная граница $\mathcal{R}_X \geq \Delta_X(1 - \tau)^n/2$ для полного n -наблюдательного эксперимента. Независимость здесь существенна именно для представления совместных законов произведениями; в основной T1 она не нужна.

9 Контрпримеры к слишком сильным формам

СЕ1. Одна заданная ветвь. При $P_L = P_R$, целях 0, 1 и постоянной оценке 0 имеем $r_L = 0, r_R = 1$. Нельзя требовать $r_b \geq (1 - \tau)/2$ для каждого b .

СЕ2. Одна общая «худшая» ветвь. При тех же одинаковых данных две координаты имеют цели (0, 0) и (1, 1), а оценка постоянна и равна (0, 1). Тогда

$$(r_{X,L}, r_{D,L}) = (0, 1), \quad (r_{X,R}, r_{D,R}) = (1, 0).$$

Поэтому $\max_b(r_{X,b}, r_{D,b}) = 0$, хотя $\mathcal{R}_X \mathcal{R}_D = 1$. Т2 не устанавливает положительную нижнюю границу для первого выражения.

СЕ3. Ожидание произведения ошибок. Если при одинаковых распределениях оценка независимо от ветви с вероятностями 1/2, 1/2 выбирает (0, 1) и (1, 0), то в каждом опыте хотя бы одна координатная ошибка нулевая. Следовательно, $\max_b \mathbb{E}_b[e_X e_D] = 0$, но все четыре маргинальных ожидаемых ошибки равны 1/2, а $\mathcal{R}_X \mathcal{R}_D = 1/4$. Это одновременно пример достижения Т2 и нарушения предполагаемой нижней границы для ожидания произведения.

СЕ4. Первая степень вместо квадрата. В D1 при $\tau = 1/2$, $\Delta_X = \Delta_D = 1$ произведение рисков равно 1/16. Ошибочная усиленная правая часть $(1 - \tau)/4$ равна 1/8. Универсальная замена квадрата первой степенью невозможна.

СЕ5. Дисперсия вместо ошибки. У постоянной оценки стандартное отклонение равно нулю в обеих ветвях даже при разных целях. Поэтому произведение стандартных отклонений может быть нулевым при $\tau = 0$, $\Delta_X \Delta_D > 0$. Для квадратичной потери применимо иное неравенство: в нормированном пространстве $d(a, x_L)^2 + d(a, x_R)^2 \geq \Delta_X^2/2$, откуда максимальный среднеквадратичный риск не меньше $\Delta_X^2(1 - \tau)/4$. После извлечения корня получается другая зависимость. Нельзя менять тип потери без изменения формулы и её размерности.

СЕ6. Неравные априорные веса. При одинаковых данных, целях 0, 1 и априорной вероятности левой ветви 0,9 байесовская оценка 0 имеет средний абсолютный риск 0,1, меньший 1/2. Т1 относится к максимуму ветвевых рисков; она не является оценкой любого априорно взвешенного среднего.

СЕ7. Селекция и бесплатный отказ. В D1 можно оставить только исходы L, R , исключив $\perp$. При $\tau > 0$ условный риск на оставшейся доле τ равен нулю. Это другой эксперимент: после условия удержания его ветви различимы. При бесплатном отказе на всех исходах вообще можно получить нулевую потерю, но нарушить метрическую предпосылку А4. Должны быть явно заданы покрытие, политика отказа и функция потерь; ABSTAIN нельзя одновременно считать отсутствующим измерением и нулевой научной ошибкой.

10 Связь с классической теорией решений

Т1 — применение классического двухточечного метода Ле Кама к метрической потере. В [2, §1.1, теорема 1.2, с. 1] приведена общая граница с коэффициентом $1/(2\alpha)$ для потери с α -неравенством треугольника; наш метрический случай соответствует $\alpha = 1$. Исторический обзор взаимосвязи методов Ле Кама, Ассуада и Фано дан в [1]. Эти методы и саму общую двухточечную границу не следует приписывать проекту KLT-RBD как новое открытие.

Авторская постановка проекта здесь состоит в выборе координат $S, \mathfrak{D}, R$, структурного разрыва K , границ применимости и интерфейса физического паспорта ПН.2. Подстановка этих величин и произведение двух нижних границ — условное следствие классической схемы. Самостоятельная новизна конкретной физической интерпретации этим аудитом не установлена.

При равных априорных весах минимальная вероятность ошибки различения двух простых гипотез равна $(1 - \tau)/2$ [2, приложение А, с. 3]. Эта статистическая связь объясняет роль перекрытия. Она не превращает информационную нижнюю границу в подтверждённый универсальный физический закон.

11 Размерности и переход к эксперименту

$$[\mathcal{R}_S] = [\Delta_S] = [S], \quad [\mathcal{R}_D] = [\Delta_D] = [D], \quad [\mathcal{R}_R] = [\|K\|] = [R], \quad [\tau] = 1. \quad (13)$$

В c -форме $[c] = [S]/[R]$. Аудит не отождествляет $\|K\|$ с $\hbar$ и не задаёт размерность структурной координаты без паспорта.

Для применения к прибору необходимы реализуемые ветви, их подготовка и полные законы данных, конкретная потеря, правила оценивания, систематические ошибки, единицы и калибровка. Если известно только $\tau \leq \bar{\tau} < 1$, можно использовать консервативную правую часть с $\bar{\tau}$. Нижняя оценка для TV или успешный различающий классификатор сами по себе такой положительной нижней границы риска не удостоверяют. Для оценённого по выборке ограничения должны быть указаны его вероятностное покрытие и условия модели.

Физические РО-1-РО-8 и РО-10 этим текстом не закрываются. РО-9/11/12 сохраняют прежние абстрактные статусы. F-1-F-14 остаются открытыми физическими гипотезами. Закрытия на октонионной кандидатной ветви, если они имеются в других материалах, не переносятся на физический канон этим аудитом.

12 Проверка примеров и воспроизводимость

К выпуску приложен скрипт `verify_statistical_audit.py`. Он проверяет точные рациональные дискретные примеры, сравнивает выбранные двоичные эксперименты с независимой задачей линейного программирования, вычисляет интегралы равномерного и нормального примеров и проверяет численные свидетели CE1-CE7. Результаты сохраняются в отдельном JSON с версиями используемых библиотек.

Эти вычисления проверяют примеры и согласованность чисел; они не заменяют доказательство T1/T2 и не являются машинно проверенным формальным доказательством либо независимым экспериментальным EXT-RUN.

13 Решение о каноне и реестр статусов

Объект	Решение C3.8T
T1, T2-S, T2-R	Доказаны при A1-A6
T2-c	Дополнительно требуется с-разделимость
Коэффициент $1/4$ и квадрат перекрытия	Точны на семействе D1
Усиления CE1-CE7	Не следуют; предъявлены контрпримеры
Исходный C3.8N	Сохранён без изменения байтов
Каноническая редакция	Патч не применён
Предложение	Отдельное условное статистическое приложение
Независимая экспертиза	Не проведена
Физический статус / EXT-RUN	Не повышен / NOT_RUN

Предложение о каноническом приложении включает A1-A6, T1/T2, область действия произведения рисков, классическое авторство метода и физические ограничения. Для включения требуется отдельное авторское решение, предусмотренное планом C3.8T. Оно не подменяется публикацией аудита на выставочном сайте.

14 Источники

1. Yu, B. **Assouad, Fano, and Le Cam**. In: Pollard, D., Torgersen, E., Yang, G. L. (eds). Festschrift for Lucien Le Cam. Springer, 1997, pp. 423-435. DOI: 10.1007/978-1-4612-1880-7_29. Библиографические сведения сверены по издателю; полный платный текст для аудита не использовался.
2. **Lecture 27: Reduction to hypothesis testing**. Учебные материалы IISc, каталог курса 2025; §1.1, теорема 1.2, с. 1-2; приложение A, с. 3-4. Открытый PDF. Получен и прочитан 06.09.2026; четыре PDF-страницы. SHA-256: 1824d83ff5e85c563b5065d5f0f3dd3c6827ecad7ab0a08ef0bc296e38a73c5f.
3. Курпишев И. Б. **C3.8N: PN.2 Physical Bridge / Statistical Extension**. Кандидат PN2-SD-C3.8N-v0.1, исходные pn2-statistical-extension.json, pn2-statistical-extension.html, docs/C3_8N_PHYSICAL_BRIDGE_FORMALIZATION_RU.md. Пакет KURPISHEV_CLONE_C3_8N_PN2_PHYSICAL_BRIDGE_v2_7.zip; SHA-256 cd5ed8bcd02775c3f6eb38f72bf70e175e0f3c6745dd0811c2cbda22cfa0097c. Источник восстановлен из авторского комплекта; не изменялся.
4. **Unified Exhibition v3.5: ARBD**. Предыдущая опубликованная сборка единого сайта. SHA-256 полного ZIP dc52b08c4db47adfdce7103b050368757ce8fffd0a2bbe3efef0dc0cd5533c05b. Использована как неизменная точка наследования и отката.